

МНОГОМЕРНЫЕ ЕВКЛИДОВЫ ПОВЕРХНОСТИ, ЗАДААННЫЕ НЕСКОЛЬКИМИ СКАЛЯРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Аннотация.

Актуальность и цели. В настоящее время активно развивается теория поверхностей многомерных евклидовых пространств. Исследованы гиперповерхности, описываемые одной явной скалярной функцией. Начаты исследования поверхностей, задаваемых несколькими скалярными функциями. Целью настоящей работы является описание поверхностей, задаваемых несколькими скалярными функциями.

Материалы и методы. Рассматриваются поверхности, являющиеся пересечением нескольких цилиндрических поверхностей.

Результаты. Выписаны касательные плоскости цилиндрических поверхностей и их пересечений. Получены координаты векторов нормалей цилиндрических поверхностей и их пересечений. Приведены выражения коэффициентов форм кривизны цилиндрических поверхностей через коэффициенты их метрических форм. По заданным коэффициентам метрических форм цилиндрических поверхностей найдены поверхности, являющиеся пересечением заданных как пересечения цилиндрических поверхностей.

Выводы. Всякая поверхность многомерного евклидова пространства, отличная от гиперповерхности и цилиндрической поверхности, является пересечением цилиндрических поверхностей и определяется с точностью до положения в пространстве метрическими формами цилиндрических поверхностей.

Ключевые слова: многомерное евклидово пространство, поверхность, цилиндрическая поверхность, метрическая форма поверхности, определяемость поверхности.

А. И. Dolgarev

MULTIDIMENSIONAL EUCLIDEAN SURFACES, SET BY SEVERAL SCALAR FUNCTIONS

Abstract.

Background. Nowadays, the theory of multidimensional Euclidean surfaces is actively developing. There have been investigated hypersurfaces, described by one explicit scalar function. There has been started a research of surfaces, set by several scalar functions. The aim of this work is to describe surfaces, set by several scalar functions.

Materials and methods. The author considered surfaces that are an intersection of several cylindrical surfaces.

Results. The author drew out tangential planes of cylindrical of surfaces and their intersections, obtained coordinates of vectors of cylindrical surface normals and their intersections and introduced expressions of coefficients of curvature forms of cylindrical surfaces through coefficients of their metric forms. For given coefficients of metric forms of surfaces, the author found cylindrical surfaces that are an intersection the set ones as the intersection of cylindrical surfaces.

Conclusions. Every surface of a multidimensional Euclidean space, differing from the hypersurface and the cylindrical surface, is an intersection of cylindrical

surfaces and is defined with the accuracy up to the position in space in metric forms of cylindrical surfaces.

Key words: multidimensional Euclidean space, surface, cylindrical surface, metric form of surface, surface determinability.

Введение

Поверхности многомерных евклидовых пространств рассматриваются в [1–3]. Существует и простая теория поверхностей, начатая в работах [4, 5], и других, указанных ниже. Имеется необходимость краткого изложения этой теории. n -параметрическая поверхность m -мерного евклидова пространства E^m , $1 < n < m$, может описываться одной или несколькими скалярными функциями. В последнем случае поверхность является непустым пересечением соответствующего числа цилиндрических поверхностей [4]. И по цилиндрическим поверхностям можно судить о свойствах их пересечений.

В основе простой теории поверхностей евклидовых многомерных пространств лежат n -параметрические поверхности, заданные одной скалярной функцией, т.е. поверхности-графики $z = z(x)$, $x = (x^1, \dots, x^n) \in R^n$ [3]. Поверхность рассматривается как погружение $F^n : E^n \rightarrow E^m$ в m -мерное евклидово пространство E^m совместно с образом в погружении. В пространстве выбран ортонормированный репер $(O, e_1, \dots, e_n)$. Если $m = n + 1$, то F^n является гиперповерхностью и описывается векторной функцией в стандартной параметризации:

$$r(x) = (x^1, \dots, x^n, z(x)). \quad (1)$$

Это так называемое полное задание поверхности F^n , в котором n -параметрическая поверхность F^n задается $n + 1 = m$ переменными величинами $x^1, \dots, x^n, z$, по числу компонент векторного задания. Имеются еще неполно заданные поверхности, они описываются числом компонент, меньшим $n + 1$, например, в пространстве E^3 рассматриваются поверхности, заданные функциями вида $x^2 + z^2 = a^2$, здесь считается, что $z = z(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$. Это 1-параметрические, т.е. цилиндрические поверхности 3-мерного пространства, их принято описывать векторными функциями вида

$$r = r(x, y) = (x, z(x), y), \quad (2)$$

например:

$$r = (x, \sqrt{a^2 - x^2}, y),$$

переменная величина z в (2) от параметра y не зависит. Направляющая линия $x^2 + z^2 = a^2$ цилиндрической поверхности (2) лежит в плоскости $Oxz = \langle O, e_1, e_3 \rangle$, прямолинейными образующими $\langle P, e_2 \rangle$ цилиндрической

поверхности (2) являются прямые, проходящие через точки P направляющей линии в направлении вектора e_2 .

1. Цилиндрические поверхности и их пересечения

Если $m > n + 1$, то согласно [5] в пространстве E^m n -параметрическая поверхность F^n описывается неполной функцией

$$F^n : r(x, u) = (x^1, \dots, x^n, z(x), u^{n+2}, \dots, u^m). \quad (3)$$

Функция $z(x)$ от параметров u^p не зависит, $p = n + 2, \dots, m$. Всякий объект m -мерного пространства E^m описывается m компонентами. Поверхность F^n является либо полной (гиперповерхностью), либо является неполной (цилиндрической).

Для поверхностей (3) указываются координаты нормального вектора [4], найдены выражения коэффициентов формы кривизны поверхности (3) через коэффициенты ее метрической формы [6, 7], и теперь на основе известной теоремы Петерсона – Бонне определяемость поверхности (3) сводится к заданию ее коэффициентами метрической формы [7].

Поверхность описывается либо одной явной функцией $z = z(x)$ и, соответственно, векторной функцией (3), либо несколькими явными функциями $z^c = z^c(x)$, $c = 1, \dots, k$; и, соответственно, векторной функцией:

$$F^n : r(x, u) = (x^1, \dots, x^n, z^1(x), \dots, z^k(x), u^{n+k+1}, \dots, u^m). \quad (4)$$

Параметры u^p от параметров x^i не зависят. В этом случае определяется k цилиндрических поверхностей

$$F_c^n : r^c(x) = (x^1, \dots, x^n, u^{n+1}, \dots, u^{n+c-1}, z^c(x), u^{n+c+1}, \dots, u^m), \quad c = \overline{1, k}. \quad (5)$$

Каждая поверхность F_c^n задается своей функцией $z^c(x)$, имеет размерность $(m - 1)$, причем выполняется соотношение

$$F^n = \bigcap_c F_c^n \quad (6)$$

и справедливо утверждение

Теорема 1. [7, 8]. Всякая регулярная n -параметрическая поверхность (4) евклидова пространства E^m является пересечением k цилиндрических поверхностей F_c^n , каждой размерности $(m - 1)$, $m \geq n + k$.

Приведенное утверждение уточняет положение Дж. Торпа [9, с. 184–185] об n -параметрической поверхности как пересечении гиперповерхностей.

Направляющей поверхностью цилиндрической поверхности (5) является поверхность $r_0^c(x) = (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0, z^c(x), 0, \dots, 0)$ вида (3). Прямолинейные

образующие поверхности (5) задаются векторами $e_{n+1}, \dots, e_{n+c-1}, e_{n+c+1}, e_m$. Касательными векторами поверхности (5) являются касательные векторы $r_1^c = \partial r^c / \partial x^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, z_i^c, 0, \dots, 0)$ направляющей поверхности и векторы прямолинейных образующих. Касательная плоскость поверхности в точке P такова:

$$T_P F_c^n = \langle P, r_1^c, \dots, r_n^c, e_{n+1}, \dots, e_{n+c-1}, e_{n+c+1}, \dots, e_m \rangle,$$

ее размерность $(m-1)$. И каждая из цилиндрических поверхностей F_c^n имеет единственную нормаль v_c во всякой своей точке P , причем v_c является и нормалью поверхности пересечения (6) [7]. Имеем нормальную плоскость поверхности (4):

$$T_P^\perp F^n = \langle P, v_1, \dots, v_k \rangle.$$

Поверхность определяется набором коэффициентов метрических форм поверхностей F_c^n . В этом суть простой теории поверхностей многомерных евклидовых пространств, которая более полно представлена в обзоре [6].

Вектор нормали v_c является вектором внешнего произведения векторов касательных:

$$v_c = r_1^c \wedge \dots \wedge r_n^c.$$

Его координаты найдены в [4]:

$$v_c = (-z_1^c, \dots, -z_n^c, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0),$$

компонента 1 имеет номер $n+c$.

2. Метрическая форма поверхности

Метрической формой поверхности F^n называется

$$\mu = ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j, \quad g_{ij} = r_i r_j.$$

Здесь подразумевается скалярное произведение касательных векторов.

Теорема 2. [6]. Коэффициенты метрических форм

$$\mu^c = \sum_{ij} g_{ij}^c dx^i dx^j, \quad c = \overline{1, k}, \text{ и } \mu = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j$$

поверхностей F_c^n и их пересечения $F^n = \bigcap_c F_c^n$ соответственно таковы:

$$g_{ii}^c = r_i^c r_i^c = 1 + (z_i^c)^2, \quad g_{ij}^c = r_i^c r_j^c = z_i^c z_j^c; \quad g_{ii} = r_i r_i = 1 + \sum_c (z_i^c)^2,$$

$$g_{ij} = r_i r_j = \sum_c z_i^c z_j^c, \quad i \neq j.$$

Формой кривизны поверхности F^n относительно нормали ν_c называется

$$\kappa = \sum_{ij} b_{ij}^c dx^i dx^j, \quad b_{ij}^c = \frac{z_{ij}^c}{|\nu_c|} = \frac{z_{ij}}{|\nu_c|} = \frac{z_{ij}^c}{\sqrt{1 + \sum_i (z_i^c)^2}}.$$

Нормали ν_c поверхности F^n являются и нормальными соответственно поверхностям F_c^n [7], поэтому выполняется следующая теорема.

Теорема 3 [7, 8]. Основные формы κ^c кривизны поверхности $F^n = \bigcap_c F_c^n$ совпадают соответственно с формами кривизны κ_c^c цилиндрических поверхностей F_c^n .

Для поверхностей пространства E^3 [10] установлено, что коэффициенты формы кривизны $\kappa = L(dx^1)^2 + Mdx^1 dx^2 + N(dx^2)^2$ поверхности выражаются через коэффициенты ее метрической формы $\mu = E(dx^1)^2 + Fdx^1 dx^2 + G(dx^2)^2$:

$$L = \frac{E_x}{2\sqrt{W(E-1)}}, \quad M = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_y G_x}{FW}}, \quad N = \frac{G_y}{2\sqrt{W(G-1)}}. \quad (7)$$

Для поверхности пространства E^m получена следующая теорема.

Теорема 4 [5]. Коэффициенты основных форм кривизны κ^c поверхности F^n выражаются через коэффициенты метрических форм μ^c цилиндрических поверхностей F_c^n по формулам

$$b_{ii} = \frac{g_{iii}^c}{2|\nu_c| \sqrt{g_{ii}^c - 1}}, \quad b_{ij} = \frac{1}{2|\nu_c|} \sqrt{\frac{g_{ij}^c g_{ji}^c}{g_{ij}^c}}, \quad \text{где } g_{ijk} = (g_{ij})_k = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}. \quad (8)$$

На основании теоремы Петерсона – Бонне и теоремы 4, имеем

Теорема 5 [7, 8]. Поверхности $F^n = \bigcap_c F_c^n$ евклидова пространства E^m

коэффициентами метрических форм μ^c цилиндрических поверхностей F_c^n определяются с точностью до изометрии.

Если поверхность F^n описывается одной явной функцией (в [8] $F^n = F^n_{1\Phi}$), то согласно [7] она определяется своей метрической формой.

Выполняется

Теорема 6 [7]. Если на односвязной области D n -плоскости $\langle P, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n \rangle$ пространства E^m заданы функции

$$g_{ii} > 1 \text{ и } g_{ij}, i, j = 1, \dots, n, \quad (9)$$

удовлетворяющие условиям

$$(\sqrt{g_{ii}-1})_j = (\sqrt{g_{jj}-1})_i, \quad g_{ij} = \sqrt{(g_{ii}-1)(g_{jj}-1)}, \quad (10)$$

то на этой области задана поверхность $z = z(x)$ с точностью до положения в пространстве E^m , для которой функции (9) являются коэффициентами метрической формы. Начальные условия $x^i = x_0^i, z_0 = z(x_0^i)$ выделяют единственную поверхность, проходящую через точку $P = (x_0^1, \dots, x_0^n, z_0(x_0), 0, \dots, 0)$ и имеющую в точке P вектор нормали

$$\vec{v} = (-\sqrt{g_{11}-1}, \dots, -\sqrt{g_{nn}-1}, 1, 0, \dots, 0).$$

Условия (10) приводят к дифференциальному уравнению с полным дифференциалом

$$\sum_i \sqrt{g_{ii}-1} dx^i = 0,$$

частным решением которого, удовлетворяющим заданным начальным условиям, является функция $z = z(x)$, описывающая поверхность F^n с точностью до положения в пространстве и метрическая форма которой имеет заданные коэффициенты g_{ij} .

Теорема 7 [5]. В основных нормальных направлениях поверхности F^n существуют зависимости коэффициентов форм кривизны поверхности F^n от коэффициентов метрических форм цилиндрических поверхностей F_c^n , где $F^n = \bigcap_c F_c^n$.

На основании теоремы Петерсона – Бонне и теоремы 9, имеем

Теорема 8 [5, 6]. Поверхности $F^n = \bigcap_c F_c^n$ евклидова пространства E^m

коэффициентами метрических форм μ^c цилиндрических поверхностей F_c^n определяются с точностью до изометрии. #

Если поверхность F^n описывается одной явной функцией (в [6] $F^n = F^n_{1\Phi}$), то согласно [5] она определяется своей метрической формой.

Если поверхность F^n задана k скалярными функциями $z^c(x)$, т.е. как пересечение k цилиндрических поверхностей F_c^n , то по теоремам 4, 8, каждая из цилиндрических поверхностей F_c^n определяется своей метрической формой и, следовательно, поверхность $F^n = \bigcap_c F_c^n$ определяется метрическими формами цилиндрических поверхностей F_c^n .

3. Пример получения поверхности по метрическим формам

В пространстве E^5 на 2-мерной односвязной области D с координатами x, y заданы коэффициенты трех метрических форм μ^1, μ^2, μ^3 поверхностей [8]:

$$\begin{aligned} \mu^1: g_{11}^1 &= 1 + 18y^2, g_{12}^1 = 18xy, g_{22}^1 = 1 + 18x^2; \mu^2: g_{11}^2 = 1 + 4x^2, g_{12}^2 = -8xy, \\ g_{22}^2 &= 1 + 16y^2; \mu^3: g_{11}^3 = 1 + 16x^2, g_{12}^3 = -8xy, g_{22}^3 = 1 + 4y^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Зададим начальные условия: $r(0,0) = 0$. Значит, в E^5 задана 2-параметрическая поверхность F^2 тремя функциями. Согласно теореме 6 по тройке g_{ij}^1 коэффициентов метрической формы μ^1 имеем $z_1^1 = \pm\sqrt{g_{11}^1 - 1} = \pm 3\sqrt{2}y$; $z_2^1 = \pm\sqrt{g_{22}^1 - 1} = \pm 3\sqrt{2}x$ по $g_{12}^1 = z_1^1 z_2^1 = 18xy$, следовательно, функции z_1^1, z_2^1 имеют одинаковые знаки, выберем $z_1^1 = 3\sqrt{2}y$, $z_2^1 = 3\sqrt{2}x$. Выбор противоположных знаков функций дает изометричные поверхности [8]. Получаем дифференциальное уравнение $3\sqrt{2}ydx + 3\sqrt{2}xdy = 0$, его общее решение: $z^1 = 3\sqrt{2}xy + C$, с учетом начальных условий: $z^1 = 3\sqrt{2}xy$. По оставшимся формам μ^2, μ^3 находим функции: $z^2 = x^2 - 2y^2$; $z^3 = -2x^2 + y^2$. Одна из поверхностей $F^n = \bigcap_c F_c^n$, $c = 1, 2, 3$, с данными коэффициентами метрических форм (11) цилиндрических поверхностей такова:

$$F^2: r(x, y) = (x, y, 3\sqrt{2}xy, x^2 - 2y^2, -2x^2 + y^2). \quad (12)$$

Остальные поверхности с заданными метрическими формами отличаются от выписанной (12) знаками в третьей, четвертой и пятой компонентах [8]. Все получаемые по заданию (11) поверхности симметричны поверхности (12) относительно координатных плоскостей и композиций указанных симметрий. И поверхности совпадают с точностью до движений пространства.

Список литературы

1. **Кобаяси, Ш.** Основы дифференциальной геометрии. II / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
2. **Иванов, А. О.** Лекции по классической дифференциальной геометрии / А. О. Иванов, А. А. Тужилин. – М.: Новая университетская библиотека, 2009. – 233 с.
3. **Иванова-Каратопраклиева, И.** Изгибание поверхностей. III. / И. Иванова-Каратопраклиева, П. Е. Марков, И. Х. Сабитов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12, № 1. – С. 3–56.
4. **Долгарев, А. И.** Простая теория евклидовых поверхностей произвольной размерности / А. И. Долгарев // EDUCATIO. – 2014. – № 3, Ч. 6. – С. 58 – 61.
5. **Долгарев, А. И.** Многомерные поверхности. I. Выражение коэффициентов второй квадратичной формы евклидовой поверхности через коэффициенты пер-

- вой квадратичной формы / А. И. Долгарев // *Moderni vymozhenosti vedy* – 2014 : Materialy X Miedzynarodowej naukow-praktycznej konferencji, dil 34. Matematyka. Fizyka. – Praga : Education and Skience. s.r.o., 2014. – P. 30–40.
6. **Долгарев, И. А.** Обзор простой теории поверхностей многомерных евклидовых пространств / И. А. Долгарев, А. И. Долгарев // Актуальные вопросы развития инновационной деятельности в новом тысячелетии : XV Междунар. науч.-практ. конф. (22–23 мая 2015 г., Новосибирск, Россия). – Вып. № 4 (15). – Новосибирск : Междунар. независ. институт Математики и Систем «МиС», 2015. – С. 49–58.
7. **Долгарев, А. И.** Многомерные поверхности. III. Задание поверхности коэффициентами ее метрической формы / А. И. Долгарев // *Dny vedy* – 2014 : Materialy X Miedzynarodowej naukow-praktycznej konferencji, Dil 31. Matematyka. – Praha : Education and Skience. s.r.o., 2014. – P. 72–78.
8. **Долгарев, А. И.** Метрическая определяемость поверхности 3-мерного пространства / А. И. Долгарев // Современные научные исследования: инновации и опыт [Ежемесячный журнал межотраслевого института «Наука и образование»]. – 2015. – № 1 (8). – С. 3–8.
9. **Долгарев, А. И.** Новый вид основной теоремы Гаусса в евклидовой теории поверхностей / А. И. Долгарев // *Dni vedy* – 2013 : materialy IX mezinarodni vedecko-praktika conference, Dil 32. Matematika. Vystavba a architektura. – Praga : Education and Skience. s.r.o., 2013. – P. 55 – 60.
10. **Торп, Дж.** Начальные главы дифференциальной геометрии / Дж. Торп. – Волгоград : Платон, 1998. – 360 с.

References

1. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii. II*. [Foundations of differential geometry. II]. Moscow: Nauka, 1981, 416 p.
2. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. *Leksii po klassicheskoy differentsial'noy geometrii* [Classical differential geometry lectures]. Moscow: Novaya universitetskaya biblioteka, 2009, 233 p.
3. Ivanova-Karatopraklieva I., Markov P. E., Sabitov I. Kh. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* [Fundamental and applied mathematics]. 2006, vol. 12, no. 1, pp. 3–56.
4. Dolgarev A. I. *EDUCATIO*. 2014, no. 3, part 6, pp. 58–61.
5. Dolgarev A. I. *Moderni vymozhenosti vedy – 2014: Materialy X Miedzynarodowej naukow-praktycznej konferencji, dil 34. Matematyka. Fizyka* [Modern advances of science – 2014: Proceedings of X International scientific and practical conference, Mathematica. Physics]. Praga: Education and Skience. s.r.o., 2014, pp. 30–40.
6. Dolgarev I. A., Dolgarev A. I. *Aktual'nye voprosy razvitiya innovatsionnoy deyatel'nosti v novom tysyacheletii: XV Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. (22–23 maya 2015 g., Novosibirsk, Rossiya)* [Topical problems of innovative activity development in the new millenium: XV International scientific and practical conference (22–23 May 2015, Novosibirsk, Russia)]. Iss. 4 (15). Novosibirsk: Mezhdunar. nezavis. institut Matematiki i Sistem «MiS», 2015, pp. 49–58.
7. Dolgarev A. I. *Dny vedy – 2014: Materialy X Miedzynarodowej naukow-praktycznej konferencji, Dil 31. Matematika* [Days of science – 2014: Proceedings of X International scientific and practical conference, Mathematics]. Praha: Education and Skience. s.r.o., 2014, pp. 72–78.
8. Dolgarev A. I. *Sovremennye nauchnye issledovaniya: innovatsii i opyt. Ezhemesyachnyy zhurnal mezhotraslevogo instituta «Nauka i obrazovanie»* [Modern scientific research: innovations and experience. Monthly journal of the intersectoral institute “Science and education”]. 2015, no. 1 (8), pp. 3–8.

9. Dolgarev A. I. *Dni vedy – 2013: Materiali IX mezinardni ve-decko-praktika conference, Dil 32. Matematika. Vystavba a architektura* [Days of science – 2013: Proceedings of IX International scientific and practical conference, Mathematics. Construction and architecture]. Praga: Education and Science. s.r.o., 2013, pp. 55–60.
10. Торп Д. *Nachal'nye glavy differentsial'noy geometrii* [First chapters of differential geometry]. Volgograd: Platon, 1998, 360 p.

Долгарев Артур Иванович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: delivar@yandex.ru

Dolgarev Artur Ivanovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling, Penza
State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

УДК 514

Долгарев, А. И.

Многомерные евклидовы поверхности, заданные несколькими скалярными функциями / А. И. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 2 (38). – С. 45–53. DOI 10.21685/2072-3040-2016-2-4